Semana da Matemática de Abaetetuba
MATEMÁTICA E IDENTIDADE: Cultura, Diversidade e Inclusão
8ª SEMAT 02 a 04 Dezembro 2020
ABAETETUBA

Modelagem do problema da Braquistócrona usando o Método Variacional e o software GeoGebra

Aline Faraildes R. Carvalho [1]
Suellen Cristina Q. Arruda [2]

RESUMO: Ao longo dos últimos três séculos, o estudo das equações diferenciais atraiu a atenção de vários matemáticos e físicos renomados como Newton, Leibniz, família Bernoulli, Euler, Lagrange e Laplace. Atualmente, é indiscutível que equações diferenciais continuam sendo uma área de pesquisa altamente produtiva e interessante, envolvendo além de uma matemática rigorosa, uma diversidade quanto às suas aplicações. Neste trabalho, abordaremos a resolução do famoso problema da Braquistócrona através do Método Variacional. O problema consiste em determinar a curva definida pela trajetória de uma partícula que, partindo do repouso e sob a ação somente da força gravitacional, se desloca entre dois pontos no menor tempo possível. E ainda, usaremos o software GeoGebra para simular o deslocamento de uma partícula sobre a reta e a Braquistócrona, evidenciando a validação do da solução do problema.

Palavras-chave: *Braquistócrona, Método Variacional, GeoGebra.*

INTRODUÇÃO

O problema da Braquistócrona foi proposto pelo matemático Johann Bernoulli no século XVII como um desafio para os matemáticos mais brilhantes da época, sendo um dos acontecimentos que contribuíram fortemente para o desenvolvimento do Cálculo Variacional, pois, através dele é possível solucionar o referido problema, cujo resultado é uma cicloide invertida. O nome Braquistócrona surge da união das palavras gregas Brakhisto, que significa o mais curto, e Chronos, que significa tempo. Assim, o problema da Braquistócrona consiste em determinar a curva que une dois pontos quaisquer a diferentes distâncias, pela qual uma partícula somente pela força da gravidade desce o mais rápido possível até atingir o seu ponto mínimo.

O uso da tecnologia se tornou essencial para a sociedade na última década. Diversos estudos apontam que a utilização de ferramentas computacionais traz melhorias significantes para o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos. Diante disso, o software GeoGebra será importante para compreender o problema da Braquistócrona, sendo possível simular o movimento da curva cicloide e compará-lo com outras curvas, comprovando assim que esta curva faz o percurso entre dois pontos distintos no menor tempo.

1. A BRAQUISTÓCRONA E O MÉTODO VARIACIONAL

No contexto do método variacional, o objetivo do problema da Braquistócrona é determinar a função $y = y(x)$ que representa a trajetória de menor tempo de uma partícula deslizando do ponto de origem $A(0,0)$ até um ponto $B(x, y)$ situados no mesmo plano vertical, apenas sob a ação da gravidade, conforme mostra a *Figura 1*. Note que se A e B estiverem na mesma vertical, a solução é uma reta. Para que a

[1] *Licenciando em Matemática – Universidade Federal do Pará/Campus Universitário do Baixo Tocantins – E-mail: alineribeirocarvalho10@gmail.com*
[2] *Doutora em Matemática – Professora da Universidade Federal do Pará/Campus Universitário do Baixo Tocantins – E-mail: scqarruda@ufpa.br*

força exercida pela gravidade fique orientada no sentido positivo, admitimos o eixo y orientado no sentido oposto do usual.

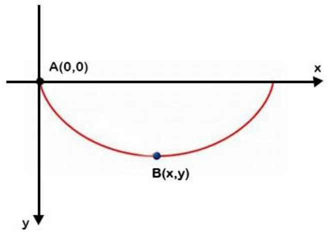

Figura 1: Esquema do problema da Braquistócrona no plano.

Segundo o Princípio da conservação de energia, a quantidade total de energia em um sistema isolado é sempre constante, ou seja, na ausência de forças dissipativas, a energia mecânica E_M de um sistema não se altera ao passar do tempo, ocorrendo apenas transformação em suas energias cinética K e potencial U. Sendo assim, dados quaisquer pontos A e B, $E_M = K_A + U_A = K_B + U_B = constante$.

Em Física, a energia gravitacional é a energia que uma partícula possui devido a atração gravitacional da Terra, dependendo apenas da altura (posição vertical) da partícula em relação ao ponto de referência.

Considerando v o módulo da velocidade da partícula em certo instante, y o seu deslocamento vertical e m a sua massa, temos que no ponto A, a energia potencial é dada por mgy, onde g é a aceleração da gravidade, e a energia cinética é nula, pois parte do repouso. No entanto, no ponto B, a energia potencial é nula e a energia cinética é dada por $\frac{mv^2}{2}$. Assim, a velocidade de uma partícula em queda livre, partindo do repouso, em um determinado tempo é obtida pela fórmula $v = \sqrt{2gy}$.

Sabendo que o comprimento do arco entre A e B, representado pelo gráfico da função $y = y(x)$, é dado por

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(\zeta)}\ d\zeta$$

e que a velocidade escalar de uma partícula é a variação do espaço percorrido s pelo tempo t, isto é, $v = \frac{ds}{dt}$, segue que

$$dt = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}dx$$

Logo, integrando esta última expressão com relação à x, o tempo total para que a partícula descreva uma trajetória qualquer se deslocando de A para B é dado por

$$t(x) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}dx$$

Agora, a ideia é encontrar a função $y = y(x)$ de modo que t seja mínimo e que satisfaça as condições de fronteira $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$. Neste caso, a função $y = y(x)$ deve satisfazer a equação diferencial de segunda ordem dada por

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0\,,$$

conhecida como Equação de Euler. Como F não depende da variável x, podemos reduzir a equação de Euler à identidade de Beltrami $F - y'F_{y'} = C$. Assim, seja $F(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$, então, usando a identidade de Beltrami, obtém-se a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$y = \left(1 + y'^2\right) = C, \text{ com } C > 0.$$

Finalmente, considerando $y'\big(x(t)\big) = cotg(t)$ e usando algumas substituições trigonométricas, temos

$$x = \frac{C}{2}\big(2t - sen(2t)\big) \text{ e } y = \frac{C}{2}\big(1 - cos(2t)\big),$$

que é a solução paramétrica da curva Braquistócrona, cujo gráfico é uma cicloide.

2. Abordagem da Braquistócrona via Software GeoGebra

O software Geogebra é um programa matemático, que permite ao aluno, dentre outras ferramentas, a visualização de gráficos 2D e 3D, com intuito de proporcionar o estudo da Matemática de forma mais prazeroso, dinâmico e significativo.

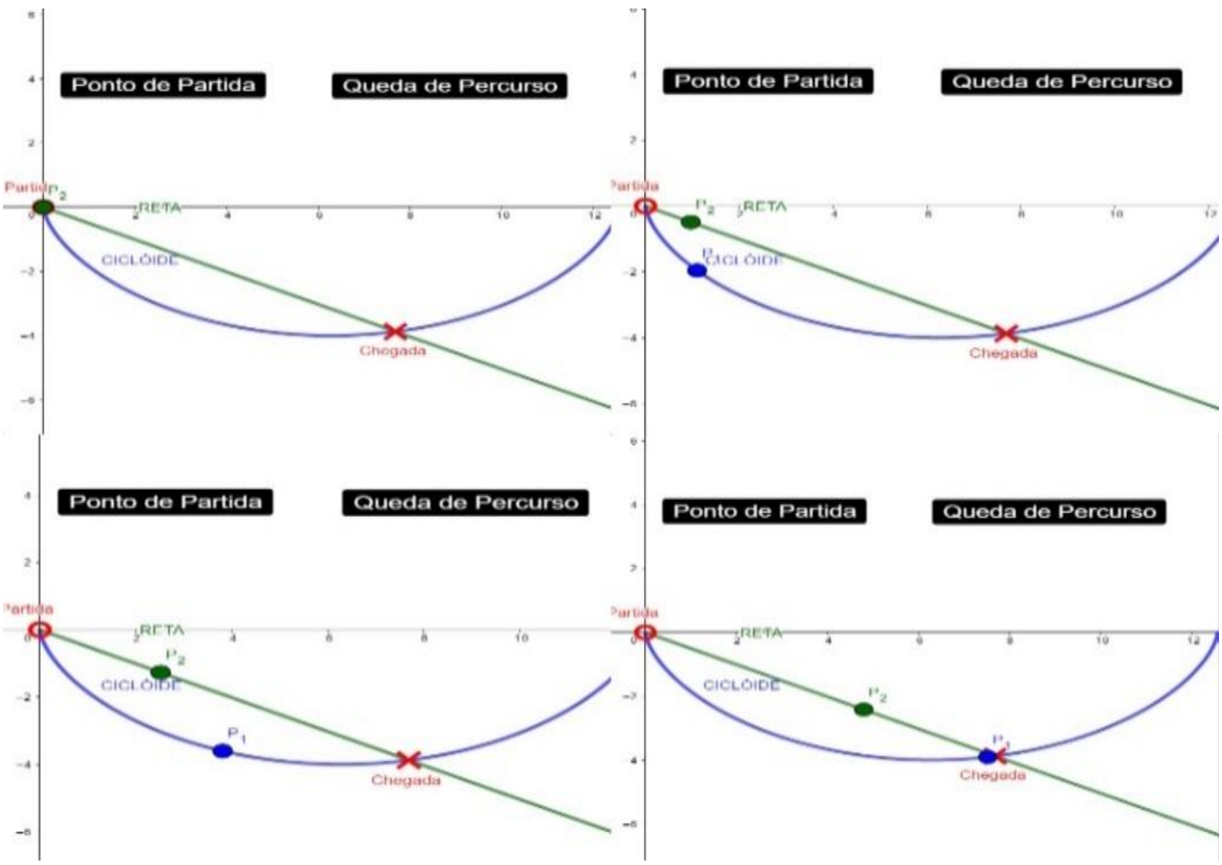

Figura 2: Trajetória da partícula ao longo da reta e da curva Braquistócrona

Deste modo, através do GeoGebra, é possível a construção da curva Braquistócrona e a visualização do deslocamento de uma partícula sobre ela. E assim, obter a comparação do tempo gasto pela partícula para percorrer a trajetória ao longo da reta e da curva cicloide, veja Figura 2. Esta dinâmica constata que a Braquistócrona atinge o menor tempo entre dois pontos distintos.

3. Considerações Finais

Com este trabalho, foi possível compreender que as Equações Diferenciais é uma área de pesquisa originada a partir da necessidade de criar modelos que solucionassem problemas reais nas diversas áreas do conhecimento. Vimos que a resolução do problema da Braquistócrona, proposto pelo matemático Jakob Bernoulli, é um importante exemplo de aplicabilidade das equações diferenciais na Física, originando um novo ramo de estudo na Matemática, o Método Variacional, cuja solução é a cicloide.

A abordagem do problema da Braquistócrona através do software GeoGebra, para analisar o movimento da partícula na reta e na cicloide, corrobora que o uso de recursos computacionais auxilia na melhoria do ensino e aprendizagem, possibilitando exploração e interação da tecnologia com a Matemática.

É importante informar que este trabalho é fruto de um projeto de iniciação científica intitulado “Uma Introdução ao Estudo de Equações Diferenciais e Aplicações”, sob a orientação da Profa. Dra. Suellen Cristina Queiroz Arruda, que visa o estudo das equações diferenciais e sua aplicabilidade nas diversas áreas do conhecimento, proporcionando ao discente uma formação básica na área.

Referências

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 11 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. Rio de Janeiro: Impa, 1997.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. Vols. 1 e 2: 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

SOUSA JUNIOR, José R. A. **O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, São Paulo. 2010.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais, volume 1**. 3. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.