ABAETETUBA
SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
RUA Manoel de Abreu, s/n, Bairro: Mutirão, CEP: 68.440-000
Fone/Fax: (91) 37571131/37511107

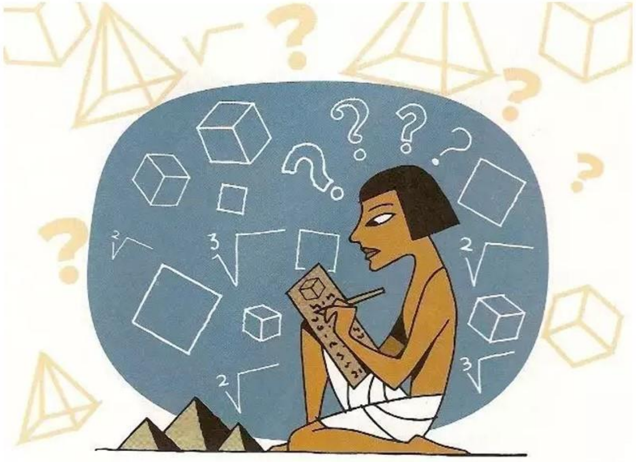
LEMAT
LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA
DA AMAZÔNIA TOCANTINA
PROF. ADEMAR CASCAES

Aula 07

Tópico III: Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega;
- Problemas clássicos antes de Euclides;
- Por que a régua e o compasso?
- Organização dos livros que compõem os elementos;

Disciplina

Evolução da Matemática



Prof. Dr. Osvaldo dos Santos Barros
www.osvaldosb.com

3. Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega

Problemas clássicos antes de Euclides

Entre os diversos problemas matemáticos clássicos difundidos antes de Euclides estão o da duplicação do cubo e o da quadratura do círculo.

O famoso problema da trissecção do ângulo será tratado por nós mais adiante, uma vez que deve ter se tornado um problema mais tardiamente que os outros no contexto das reflexões sobre as técnicas de construção.

3. Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega

Problemas clássicos antes de Euclides

Com relação à duplicação do cubo, existe uma lenda segundo a qual em 427 a.E.C. Péricles teria morrido de peste juntamente com um quarto da população de Atenas.

Consternados, os atenienses consultaram o oráculo de Apolo, em Delos, para saber como enfrentar a doença.

A resposta foi que o altar de Apolo, que possuía o formato de um cubo, deveria ser duplicado.

ABAETETUBA

3. Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega

Problemas clássicos antes de Euclides

Prontamente, as dimensões do altar foram multiplicadas por 2, mas isso não afastou a peste. O volume havia sido multiplicado por 8, e não por 2.

A partir dessa lenda, o problema que consiste em, dada a aresta de um cubo, construir só com régua e compasso a aresta de um segundo cubo tendo o dobro do volume do primeiro, ficou conhecido como problema deliano.

3. Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega

A resolução de problemas geométricos envolve sempre uma construção, e o critério usado nessa classificação baseia-se nos tipos de linhas necessárias para efetuá-la.

Além da régua e do compasso, são listados métodos que usam cônicas e curvas mecânicas, como a quadratriz, a espiral e o conchoide de Nicomedes, conhecidos antes do fim do século III a.E.C.

3. Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega

As construções com régua e compasso não permitem resolver todos os problemas propostos pelos matemáticos gregos antes e depois de Euclides, que não se furtavam, por isso, a utilizar outros métodos.

Recorrendo-se a cônicas e curvas mecânicas foram resolvidos alguns dos problemas clássicos da geometria grega, como a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e também a trissecção do ângulo, esta um pouco mais tardiamente.

3. Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega

Problemas clássicos antes de Euclides

Assim como a duplicação do cubo, o problema da quadratura do círculo provavelmente também era conhecido por volta do século V a.E.C.

Aristóteles afirma que Hipócrates teria fornecido uma prova falsa do problema em seu tratado sobre as lúnulas. Como mencionado no Capítulo 2, Hipócrates havia demonstrado que as áreas de dois círculos estão uma para a outra assim como os quadrados de seus diâmetros.

3. Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega

Problemas clássicos antes de Euclides

Os métodos presentes nesse trabalho incluem o da neusis (ou intercalação), que será descrito mais à frente, e o da aproximação de círculos por polígonos com número de lados cada vez maior.

Essa aproximação é encontrada no texto do Filósofo Antifonte, mas deve ser atribuída a Hipócrates, como argumenta Knorr.

3. Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega

Problemas clássicos antes de Euclides

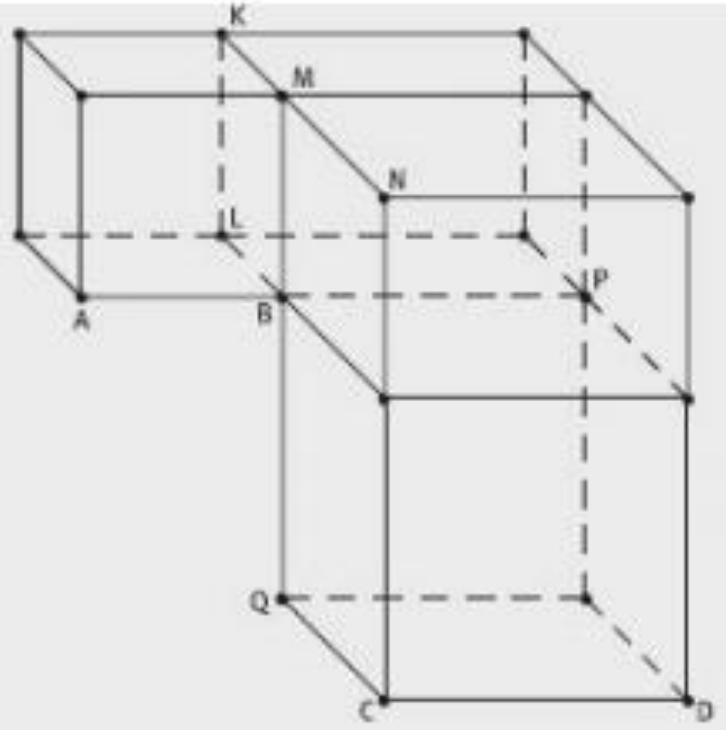


ILUSTRAÇÃO 1

Feito isso, inserindo duas meias proporcionais CD e EF entre o segmento AB e seu dobro, ou seja, construindo esses segmentos de modo que $\frac{AB}{CD} = \frac{CD}{EF} = \frac{EF}{GH = 2AB}$, seria possível deduzir que o cubo descrito sobre CD é o dobro do cubo sobre AB.

Não apresentamos a solução devido à sua complexidade e porque nossa intenção aqui é somente ressaltar o aspecto geométrico do problema.

3. Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega

Problemas clássicos antes de Euclides

COMO APROXIMAR A ÁREA DO CÍRCULO POR POLÍGONOS

A área de um círculo pode ser aproximada pelas áreas de polígonos regulares inscritos (ou circunscritos) aumentando-se indefinidamente o número de seus lados.

ILUSTRAÇÃO 2

3. Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega

Por que a régua e o compasso?

O fato de nos Elementos de Euclides as construções serem realizadas por meio da régua e do compasso deu origem à crença de que essa seria uma restrição da geometria imposta pelos cânones da época.

Como já dito, para explicar o motivo dessa restrição é comum apelar para a filosofia platônica. Por valorizar a matemática teórica, Platão teria desprezo pelas construções mecânicas, realizadas com ferramentas de verdade.

3. Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega

Por que a régua e o compasso?

A régua e o compasso, apesar de serem instrumentos de construção, podem ser representados, respectivamente, pela linha reta e pelo círculo, figuras geométricas com alto grau de perfeição.

Na realidade, nos Elementos, as construções realizáveis com régua e compasso são executadas por meio de retas e círculos definidos de modo abstrato.

3. Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega

ABAETETUBA

Organização dos livros que compõem os *Elementos*

Os *Elementos* de Euclides se compõem dos seguintes livros:

- Livro I: primeiros princípios e geometria plana de figuras retilíneas: construção e propriedades de triângulos, paralelismo, equivalência de áreas e teorema "de Pitágoras".
- Livro II: contém a chamada "álgebra geométrica", trata de igualdades de áreas de retângulos e quadrados.
- Livros III e IV: propriedades de círculos e adição de figuras, como inscrever e circunscrever polígonos em círculos.
- Livro V: teoria das proporções de Eudoxo, razões entre grandezas de mesma natureza.
- Livro VI: aplicações do livro V à geometria, semelhança de figuras planas, aplicação de áreas.
- Livros VII a IX: estudo dos números inteiros – proporções numéricas, números primos, maior divisor comum e progressões geométricas.
- Livro X: propriedades e classificação das linhas incomensuráveis.
- Livros XI a XIII: geometria sólida em três dimensões, cálculo de volumes e apresentação dos cinco poliedros regulares.

3. Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega

Demonstração e papel do teorema "de Pitágoras"

Proposição I-47

Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.

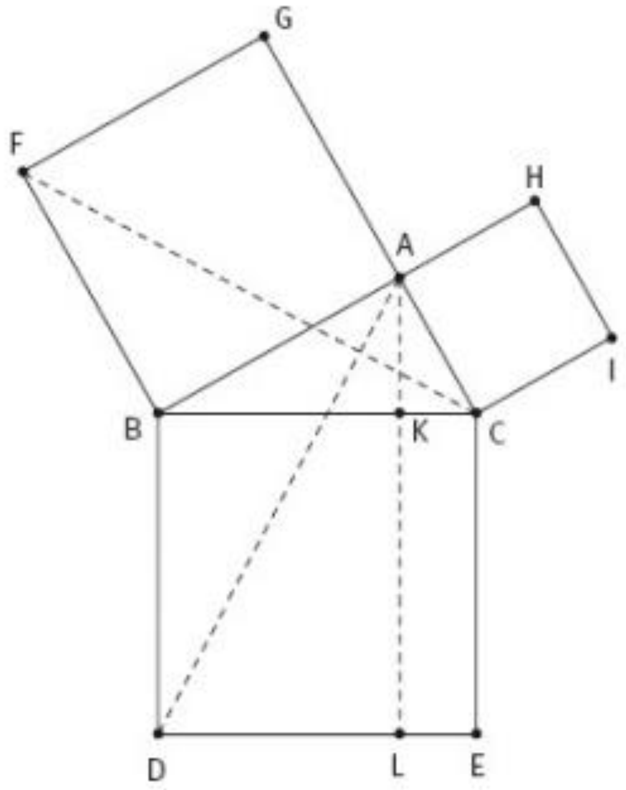


ILUSTRAÇÃO 9

3. Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega

Cálculo de áreas e problemas de "quadratura"

ABAETETUBA

Na Ilustração 16, queremos mostrar que 1 + 2 + 4 = 2 + 3 + 4 + 5. Vamos dividir nossa demonstração nas seguintes etapas:

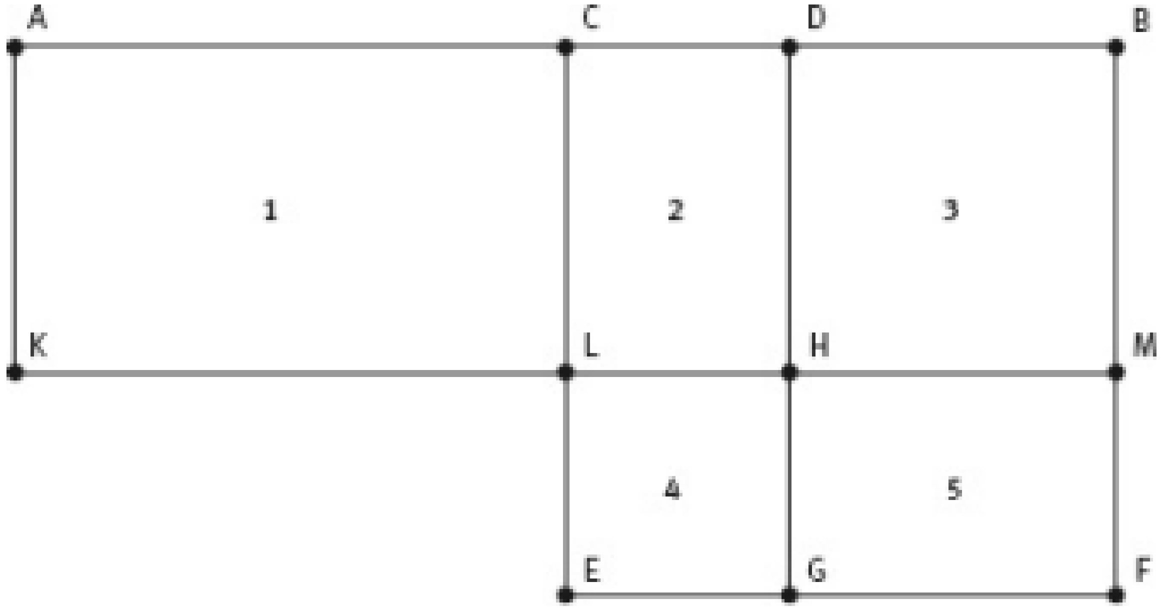


ILUSTRAÇÃO 16

i) O retângulo CDHL é igual ao retângulo HMFG (na figura, 2 = 5): Por construção, CB é igual a BF e DB é igual a DH, que é igual a BM. Portanto, CD é igual a CB − DB, que é igual a BF − BM, que é igual a MF (retiramos partes iguais de quantidades iguais, logo, os restos são iguais). Como DH é igual a HM por construção (pois DBMH é um quadrado), os retângulos CDHL e HMFG são iguais, uma vez que suas bases e suas alturas são iguais.

3. Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega

Cálculo de áreas e problemas de “quadratura”

Na Ilustração 16, queremos mostrar que 1 + 2 + 4 = 2 + 3 + 4 + 5. Vamos dividir nossa demonstração nas seguintes etapas:

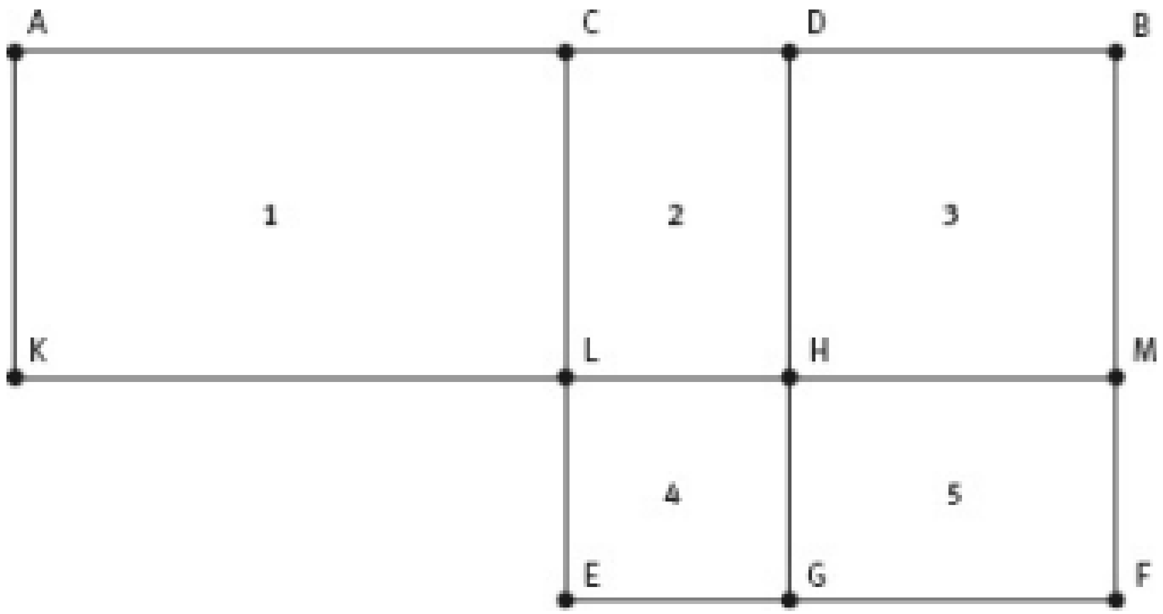


ILUSTRAÇÃO 16

ii) O retângulo CBML é igual ao retângulo DBFG (2 + 3 = 3 + 5): Adicionamos, então, o quadrado DBMH a cada um dos retângulos CDHL e HMFG. Fazendo isso, temos que o retângulo CBML é igual ao retângulo DBFG.

3. Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega

Cálculo de áreas e problemas de "quadratura"

Na Ilustração 16, queremos mostrar que 1 + 2 + 4 = 2 + 3 + 4 + 5. Vamos dividir nossa demonstração nas seguintes etapas:

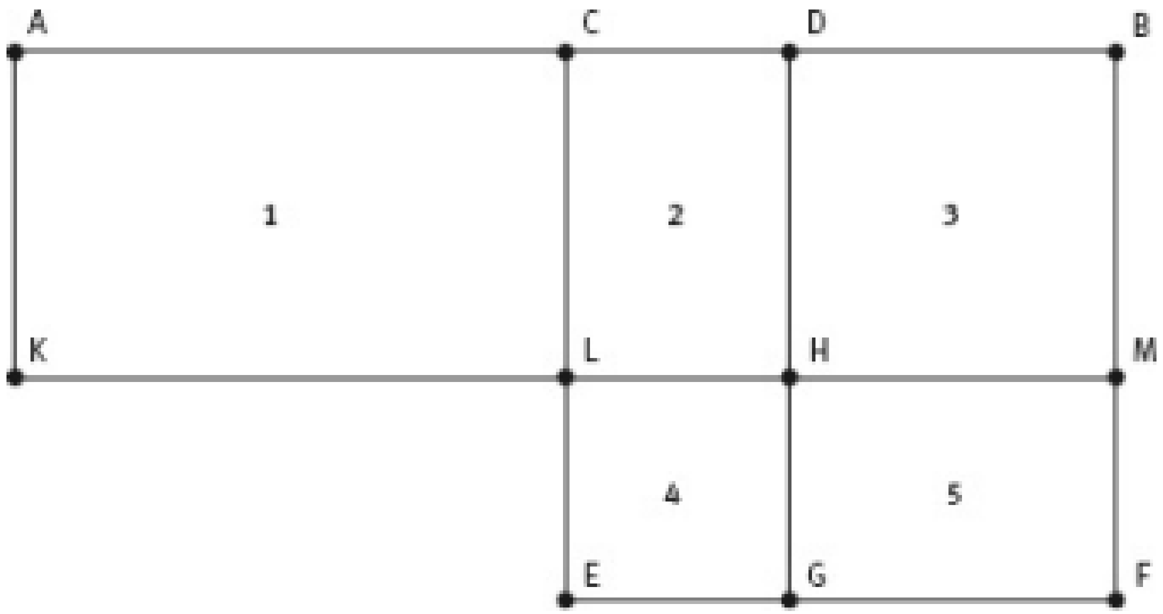


ILUSTRAÇÃO 16

iii) O retângulo ACLK é igual ao retângulo DBFG (1 = 3 + 5): O retângulo CBML é igual ao retângulo ACLK, uma vez que AC é igual a CB, e CL é igual a BM. Logo, o retângulo ACLK é também igual ao retângulo DBFG (isso equivale a dizer que 1 = 3 + 5, na Ilustração 16, então, restanos adicionar 2 e 4 a ambos os lados, o que será feito nos passos seguintes).

3. Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega

Cálculo de áreas e problemas de “quadratura”

Na Ilustração 16, queremos mostrar que 1 + 2 + 4 = 2 + 3 + 4 + 5. Vamos dividir nossa demonstração nas seguintes etapas:

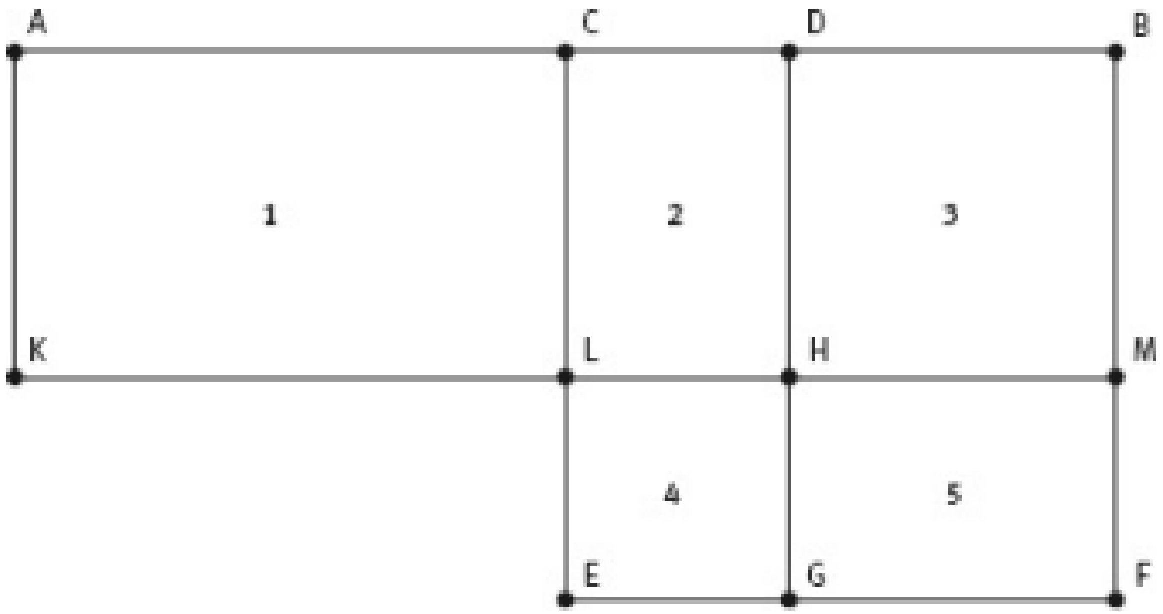


ILUSTRAÇÃO 16

iv) O retângulo ADHK é igual ao gnomon CBFGHL (1 + 2 = 2 + 3 + 5): Seguindo a demonstração de Euclides, adicionamos o retângulo CDHL a cada um dos retângulos ACLK e DBFG. Fazendo isso, o retângulo ADHK é igual ao gnomon CBFGHL (ou seja, 1 + 2 = 2 + 3 + 5).

3. Problemas, teoremas e demonstrações na geometria grega

Cálculo de áreas e problemas de "quadratura"

Na Ilustração 16, queremos mostrar que 1 + 2 + 4 = 2 + 3 + 4 + 5. Vamos dividir nossa demonstração nas seguintes etapas:

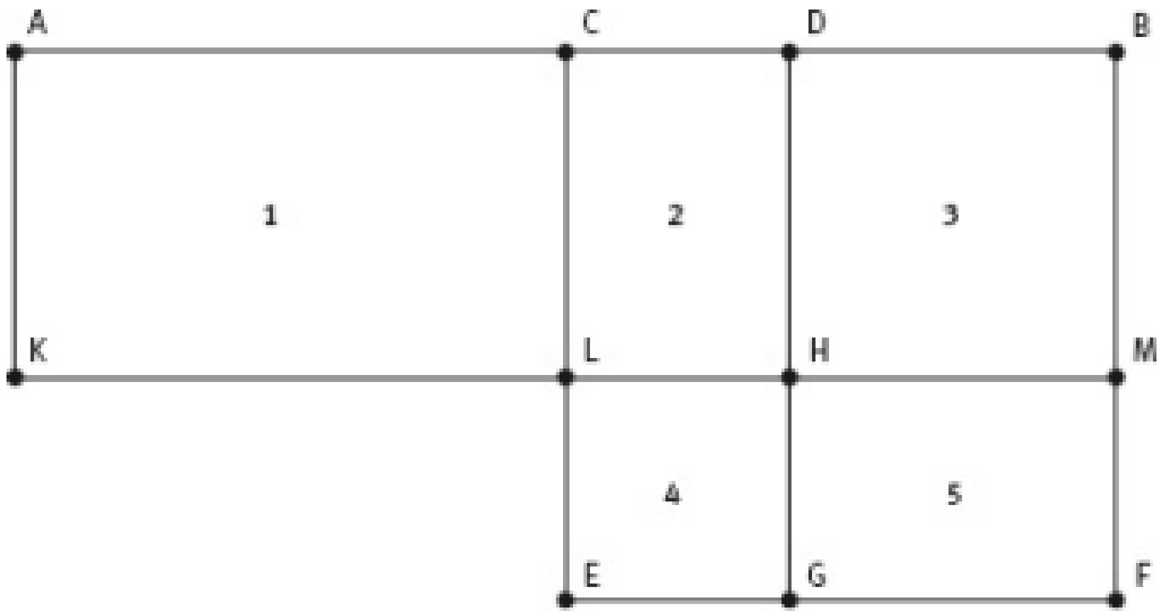


ILUSTRAÇÃO 16

v) Somando o quadrado LHGE (1 + 2 + 4 = 2 + 3 + 4 + 5): ADHK é o retângulo AD por DB, uma vez que DH é igual a DB e falta apenas acrescentar à figura CBFGHL (área 2 + 3 + 5) o quadrado LHGE (área 4) para obter o quadrado CBFE do enunciado da proposição (2 + 3 + 4 + 5). Como LHGE é igual a um quadrado construído sobre CD, temos que o retângulo AD por DB (área 1 + 2) mais o quadrado em CD (área 4) é igual ao quadrado em CB (área 2 + 3 + 4 + 5).