Universidade Federal do Pará
Campus Universitário de Abaetetuba

8ª SEMAT — Semana da Matemática de Abaetetuba
MATEMÁTICA E IDENTIDADE: Cultura, Diversidade e Inclusão
02 a 04 Dezembro 2020

Autor: Ângelo Felipe Machado Silva – a.felipesilva712@gmail.com

Orientadora: Profª Drª Suellen Cristina Queiroz Arruda – scqarruda@ufpa.br

Equações Diferenciais Ordinárias: um estudo sobre problemas de autovalores

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII solucionou diversos problemas da época, tanto quanto fomentou o surgimento e avanço de novas áreas de pesquisas, entre elas, as Equações Diferenciais. Ao longo dos últimos séculos, observou-se a sua grande relevância, seja por apresentar uma matemática rigorosa, seja por sua multiplicidade de aplicações em diversas áreas do conhecimento. Diante disso, neste trabalho abordaremos um problema conhecido como problema de autovalores cujo objetivo consiste em analisar uma equação diferencial definida com valores de contorno a fim de encontrar os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, chamados de autovalores, para os quais a solução é não-trivial. Essas soluções não-triviais são denominadas de autofunções.

CONCEITOS PRELIMINARES

Seja a equação diferencial de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \qquad (1.1)$$

onde a, b e c são constantes dadas. Supondo que $y = e^{rt}$ é uma solução de (1.1), podemos reescrever esta equação da seguinte forma:

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Como $e^{rt} \neq 0$, dividindo o resultado acima por e^{rt}

$$ar^2 + br + c = 0. \qquad (1.2)$$

Essa equação é chamada de *equação característica*. Considerando r_1 e r_2 raízes reais de (1.2), então $y_1 = e^{r_1 t}$ e $y_2 = e^{r_2 t}$ serão soluções para (1.1). Assim, notamos que a equação (1.2) é uma equação do segundo grau com coeficientes reais e, portanto, podemos considerar três casos para a solução geral da equação (1.1).

Caso 1: Se $r_1 \neq r_2$ são reais, então a solução geral será

$$\boxed{y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}}$$

Caso 2: Se $r_1 = r_2$ são reais, então a solução geral será

$$\boxed{y = c_1 t e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \text{ com } r_1 = r_2 = {}^{-b}/_{2a}}$$

Caso 3: Se r_1 e r_2 são complexas e conjugadas, ou seja, $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$, então a solução geral será

$$\boxed{y = c_1 e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} sen(\mu t)}$$

PROBLEMAS DE AUTOVALORES

Considere o problema

$$\begin{cases} y''(t) + \lambda y(t) = 0, \quad \forall\, t \in [0, \pi], \\ y(0) = y(\pi) = 0, \end{cases} \qquad (2.1)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Como o problema consiste em encontrar todos os autovalores e as autofunções, é necessário analisar os valores de λ em três eventos.

Evento 1: Suponha $\lambda < 0$. Neste caso, seja $\lambda = -\mu^2$, onde $\mu > 0$. Então, a solução geral de (2.1) é dada por

$$y(t) = c_1 \cosh(\mu t) + c_2 \operatorname{senh}(\mu t).$$

Para a primeira condição de contorno $y(0) = 0$, é necessário tomar $c_1 = 0$. Da segunda condição de contorno, temos

$$y(\pi) = c_2 \operatorname{senh}(\mu\pi) = 0,$$

o que implica em $c_2 = 0$. Logo, o problema (2.1) não possui soluções não-triviais.

Evento 2: Se $\lambda = 0$, a solução geral de (2.1) é dada por

$$y(t) = c_1 t + c_2.$$

Pelas condições de contorno, temos $y(0) = c_2 = 0$ e $y(\pi) = c_1\pi = 0$, isto é, $c_1 = 0$. Logo, $\lambda = 0$ não é um autovalor.

Evento 3: Suponha $\lambda > 0$ e considere $\lambda = \mu^2$, onde $\mu > 0$. Assim, a solução geral de (2.1) é dada por

$$y(t) = c_1 \cos(\mu t) + c_2 \operatorname{sen}(\mu t)$$

Pelas condições de contorno, $y(0) = c_1 = 0$ e $y(\pi) = c_2 \operatorname{sen}(\mu\pi) = 0$. Interessa-se em $c_2 \neq 0$. Dessa forma,

$$\operatorname{sen}(\mu\pi) = \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Longrightarrow \sqrt{\lambda} = n \Longrightarrow \lambda = n^2,\ n \in \mathbb{Z}_+^*.$$

Portanto, os autovalores do problema (2.1) são os quadrados de inteiros positivos, isto é,

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \dots, \lambda_n = n^2, \dots, \qquad (2.2)$$

E as autofunções associadas aos autovalores de (2.2) são

$$y_1(t) = \operatorname{sen}(t), y_2(t) = \operatorname{sen}(2t), \dots, y_n(t) = \operatorname{sen}(nt), \dots,$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho proporcionou o estudo introdutório das Equações Diferenciais e seus métodos de resolução. Além disso, oportunizou compreender a importância da modelagem matemática para descrever, a partir das equações diferenciais, diversos fenômenos da natureza, o que impulsionou no aprofundamento teórico de assuntos da Álgebra Linear e do Cálculo Diferencial e Integral.

Vimos que a solução do problema proposto é uma sequência infinita crescente de senos e que todos os seus autovalores são valores reais e distintos. E ainda, verificamos que a existência de soluções não triviais ocorre somente para autovalores positivos e inteiros.

REFERÊNCIAS

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 11 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais, volume 1**. 3. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. **Um Curso de Álgebra Linear**. 2 ed. São Paulo: edusp, 2018.

SILVA, Carlos Antonio Pereira da. **O problema de Sturm-Liouville e aplicações**. 2011. 46 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2011.